Aufgabe 1
Betrachten Sie in $\mathbb{R}^3$ Zylinderkoordinaten

$$\phi(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \qquad \text{wobei } 0 < r < \infty,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Gramsche Matrix (g_{ij}) sowie die Darstellungen von Gradient, Divergenz und Laplaceoperator in diesen Koordinaten. Berechnen Sie die Lösungen von $\Delta u = 0$ der Form $u(r,\varphi,z) = r^\alpha v(\varphi)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Aufgabe 2
Der untere Halbraum $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 < 0\}$ sei mit einer Flüssigkeit der konstanten Dichte $\varrho > 0$ ausgefüllt. Auf einen Körper $\Omega \subset H$ wirkt dann der vektorielle Druck $p(x) = \varrho x_3 \nu(x)$, wobei ν die äußere Normale von Ω ist. Berechnen Sie die Auftrieb

$$\vec{F} = \int_{\partial\Omega} p(x)\, dA.$$

Aufgabe 3
Sei $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} < 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle\, dA \qquad \text{wobei } F(x,y,z) = (3x^2 z, y^2 - 2x, z^3).$$

Hier bezeichnet ν die äußere Normale.

Aufgabe 4
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt mit glattem Rand und äußerer Normale $\nu(x)$, und Ω enthalte den Nullpunkt. Bezeichne mit $\alpha(x) = \angle(x, \nu(x))$, $x \in \partial\Omega$, der Winkel zwischen dem Ortsvektor x und $\nu(x)$. Zeigen Sie

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\cos\alpha(x)}{|x|^2} dA = 4\pi.$$

Tip: Schreiben Sie $\cos\alpha(x) = \langle \frac{x}{|x|}, \nu(x)\rangle$ und wenden Sie den Satz von Gauß an auf dem Gebiet $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash B_\varepsilon(0)$.